



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Podstawy wytrzymałości materiałów

IMiR - MiBM - Dodatek Nr 1

Charakterystyki geometryczne figur płaskich

Momenty statyczne, środek ciężkości figury i jego wyznaczanie, momenty bezwładności, główne centralne osie bezwładności, promienie bezwładności, twierdzenia Stainera

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

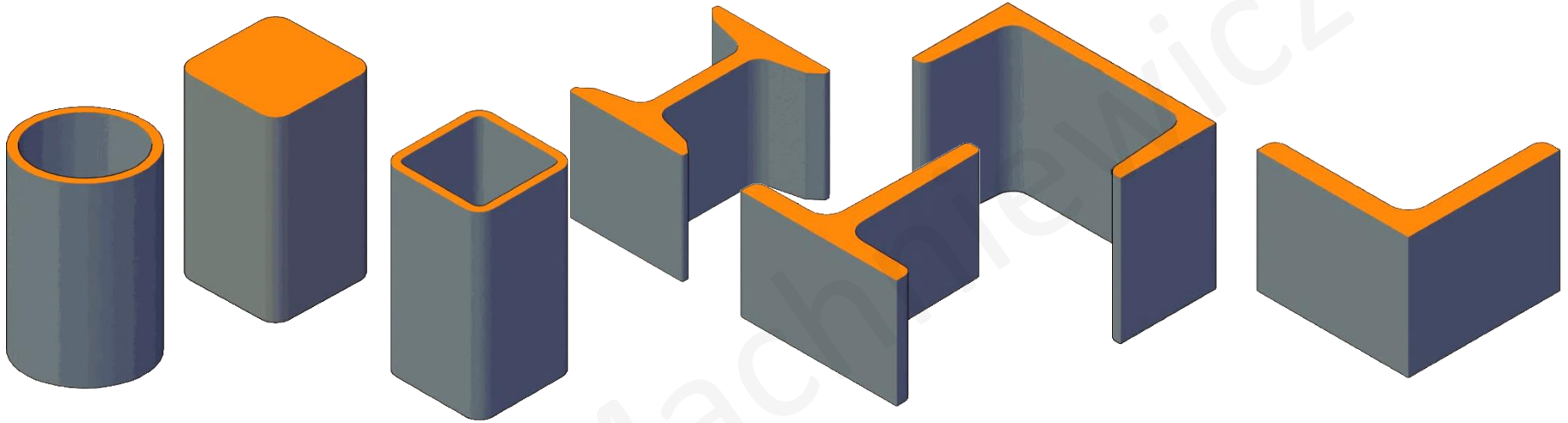
Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz

B2, II p., pok. 206

E-mail: machniew@agh.edu.pl

D1.1. Znaczenie parametrów geometrycznych figur płaskich przy ocenie wytrzymałości obiektów

Figurami płaskimi są przekroje obiektów, w których wyznaczane są siły wewnętrzne i naprężenia.



Podstawowym parametrem charakteryzującym figurę jest jej **pole powierzchni** – wielkość mianowana charakteryzująca rozmiar figury.

Pole powierzchni (A) reprezentuje wpływ cech geometrycznych obiektu na jego wytrzymałość jedynie w niektórych przypadkach obciążeń, jak:

rozciąganie/ściskanie

$$\sigma_r(\sigma_c) = \frac{N}{A} \leq k_r(k_c)$$

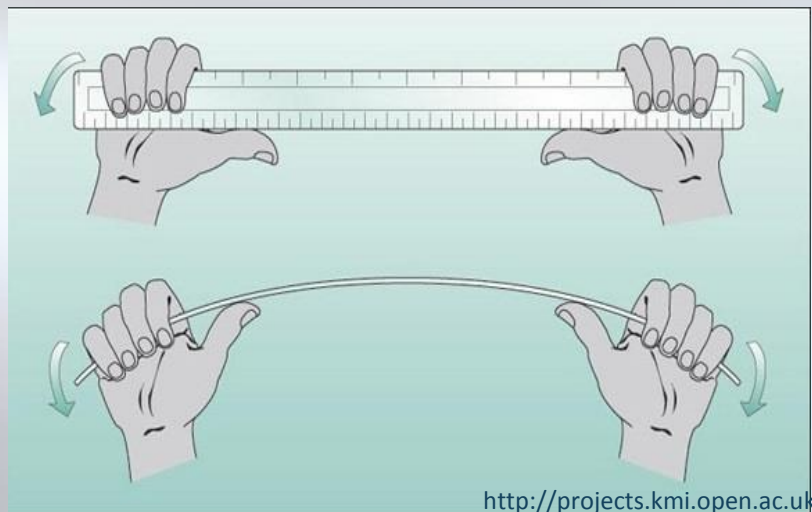
ścinięcie techniczne

$$\tau = \frac{T}{A_t} \leq k_t$$

docisk powierzchniowy

$$p_d = \frac{F}{A_d} \leq k_d$$

D1.1. Pole powierzchni figury



<http://projects.kmi.open.ac.uk>

W przypadkach takich obciążeń, **jak zginanie lub skręcanie**, wytrzymałość elementu zależy nie tylko od wielkości ale i od kształtu pola przekroju poprzecznego, a przy zginaniu także od zorientowania tegoż kształtu względem kierunku momentu zginającego.

Do opisu tych cech konieczne jest wprowadzenie nowych wielkości geometrycznych charakteryzujących przekrój elementu, tj. **momentów geometrycznych drugiego stopnia** – tzw. **momentów bezwładności**.

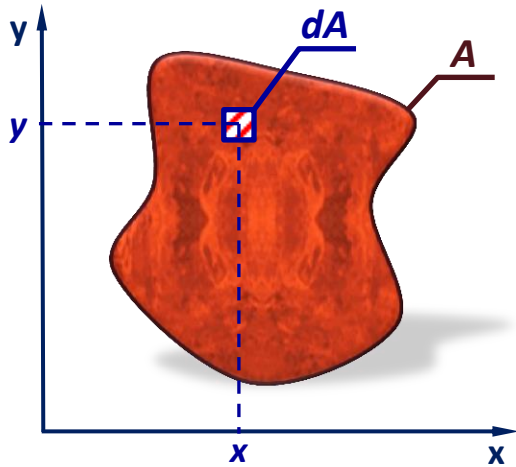
Redukcja sił wewnętrznych w przekroju elementu wymaga znajomości położenia jego **geometrycznego środka ciężkości**, przyjmowanego jako biegun redukcji rozważanego układu sił.

Wyznaczenie współrzędnych środka ciężkości figury płaskiej wymaga znajomości **momentów geometrycznych pierwszego stopnia**, czyli tzw. **momentów statycznych**.

Ogólnie więc rozważać będziemy następujące wskaźniki przekrojów:

- Pole powierzchni figury,
- Momenty statyczne,
- Momenty bezwładności

D1.2. Momenty pierwszego stopnia - momenty statyczne



Moment statyczny (dS) elementu pola (dA) obliczymy:

❖ względem osi x , jako: $dS_x = y \cdot dA$

❖ względem osi y , jako: $dS_y = x \cdot dA$

Stąd:

Momenty statyczne figury o polu A względem osi x i y definiujemy odpowiednio jako:

$$S_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_A y \cdot dA$$

$$S_y \stackrel{\text{def}}{=} \int_A x \cdot dA$$

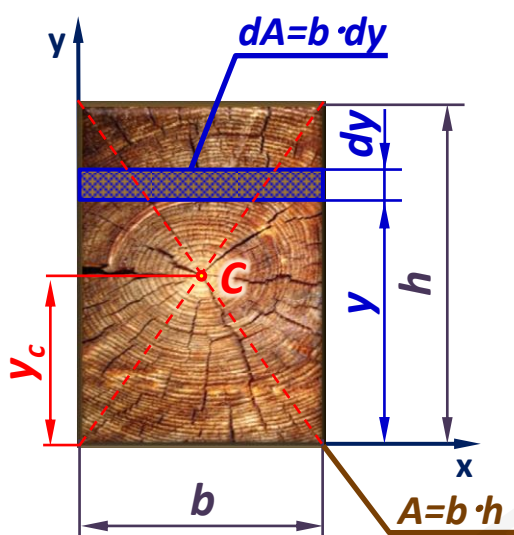
jednostka:
(... mm³, cm³, m³ ...)

gdzie \int_A oznacza całkę liczoną po całym polu figury A

Uwaga: Momenty statyczne mogą mieć wartość dodatnią, ujemną lub równą zero.

D1.2. Momenty pierwszego stopnia - momenty statyczne

Przykład 1: Obliczyć momenty statyczne prostokąta o szerokości b i wysokości h względem osi x i y przechodzących przez jego boki.



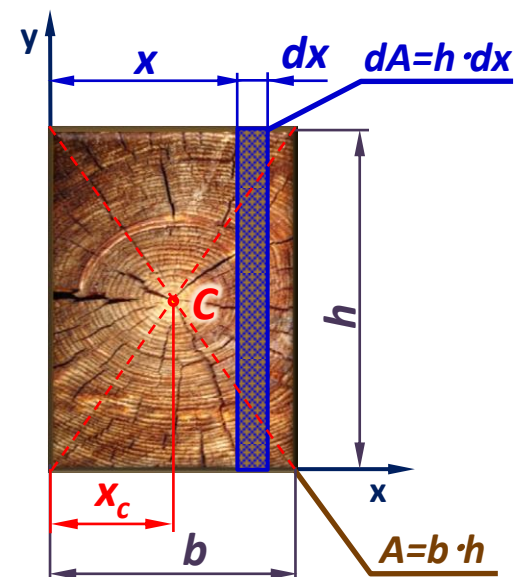
$$S_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_A y \cdot dA = \int_0^h y \cdot b \cdot dy = \left[\frac{y^2}{2} \cdot b \right]_0^h = \frac{h^2 \cdot b}{2}$$

$$S_x = h \cdot b \cdot \frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad S_x = A \cdot y_c$$

C – środek ciężkości prostokąta

$$S_y \stackrel{\text{def}}{=} \int_A x \cdot dA = \int_0^b x \cdot h \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot h \right]_0^b = \frac{b^2 \cdot h}{2}$$

$$S_y = b \cdot h \cdot \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad S_y = A \cdot x_c$$



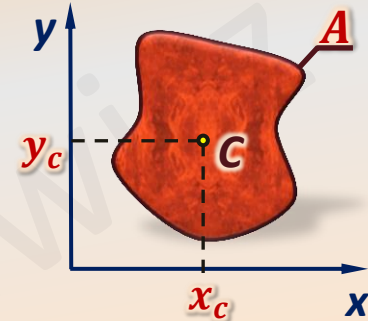
D1.2. Momenty pierwszego stopnia - momenty statyczne

Twierdzenie 1

Moment statyczny dowolnej figury jest iloczynem pola tej figury i odpowiedniej współrzędnej jej środka ciężkości, określającej jego odległość od osi, względem której moment statyczny jest liczony.

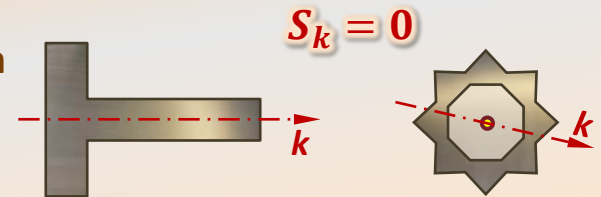
$$S_x = A \cdot y_c$$

$$S_y = A \cdot x_c$$



Twierdzenie 2

Momenty statyczne obliczane względem osi symetrii lub względem prostych przechodzących przez środek symetrii są równe zero.

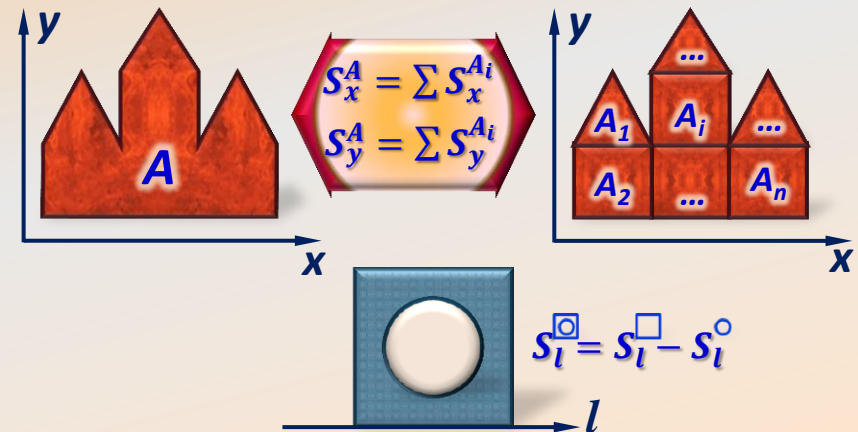


Twierdzenie 3

Jeśli figura o polu A podzielona została w sposób całkowity na n części o polach A_i , to moment statyczny całej figury A względem danej osi (S^A) równy jest sumie momentów statycznych wszystkich części tej figury (S^{A_i}) liczonych względem tej samej osi.

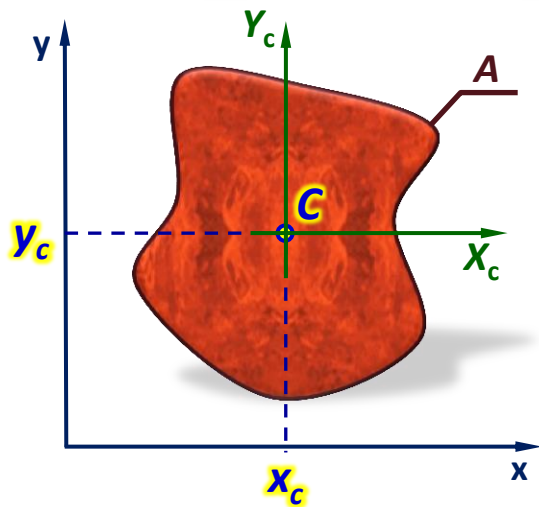
$$S_x^A = \sum_{i=1}^n S_x^{A_i}$$

$$S_y^A = \sum_{i=1}^n S_y^{A_i}$$



$$S_l^{\square} = S_l^{\square} - S_l^{\circ}$$

D1.3. Środek ciężkości figury



Środkiem ciężkości figury płaskiej nazywamy punkt o współrzędnych:

$$x_C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_y}{A}$$

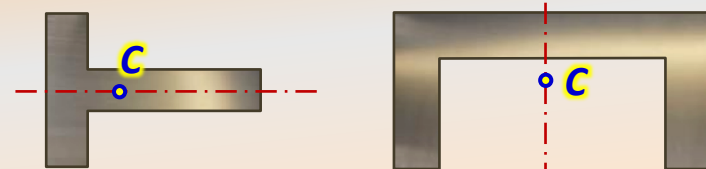
$$y_C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_x}{A}$$

gdzie: S_x, S_y – momenty statyczne figury odpowiednio względem osi x i y ,
 A – pole powierzchni figury

Osie układu współrzędnych przechodzące przez środek ciężkości figury nazywamy osiąmi centralnymi.

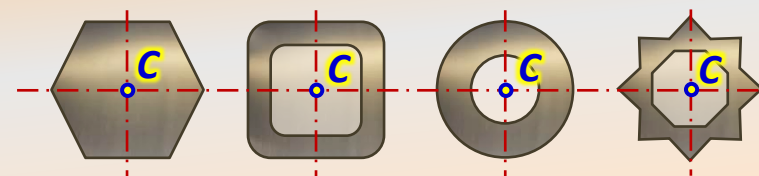
Twierdzenie 4

Jeżeli figura ma oś symetrii to oś ta przechodzi przez środek ciężkości figury.

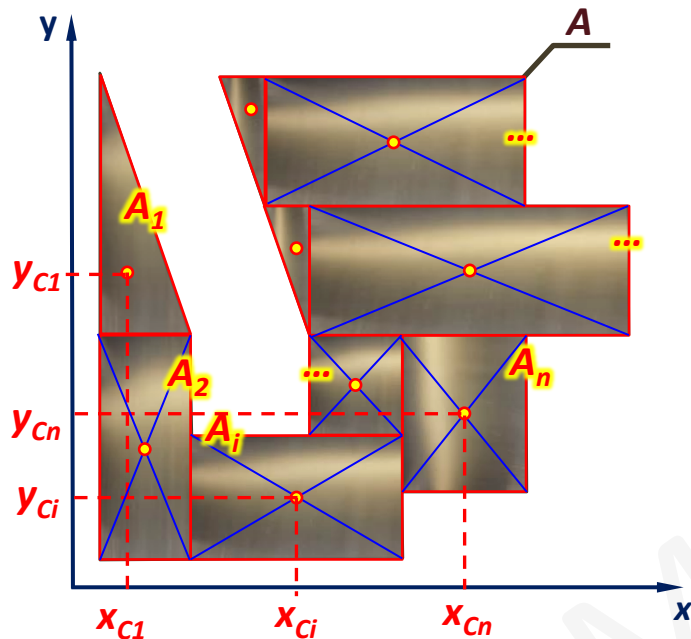


Twierdzenie 5

Jeżeli figura ma środek symetrii to jest on równocześnie środkiem ciężkości tejże figury.



D1.4. Sposób wyznaczania środka ciężkości figury



Dana jest dowolna figura o polu powierzchni A .

1. Przyjmujemy układ współrzędnych x - y .

2. Dokonujemy podziału figury A na n części, w taki sposób by dla każdej z tych części móc w łatwy sposób obliczyć pole i wskazać jej środek ciężkości.

$$A = \sum_{i=1}^n S_i$$

3. Obliczamy momenty statyczne całej figury (A), względem obydwu osi układu

$$S_x^A = \sum_{i=1}^n S_x^{A_i}$$

współrzędnych (S_x^A, S_y^A), jako sumy momentów statycznych ($S_x^{A_i}, S_y^{A_i}$) względem odpowiednich osi wszystkich części figury (A_i) na jakie podzielono całe pole A .

$$S_y^A = \sum_{i=1}^n S_y^{A_i}$$

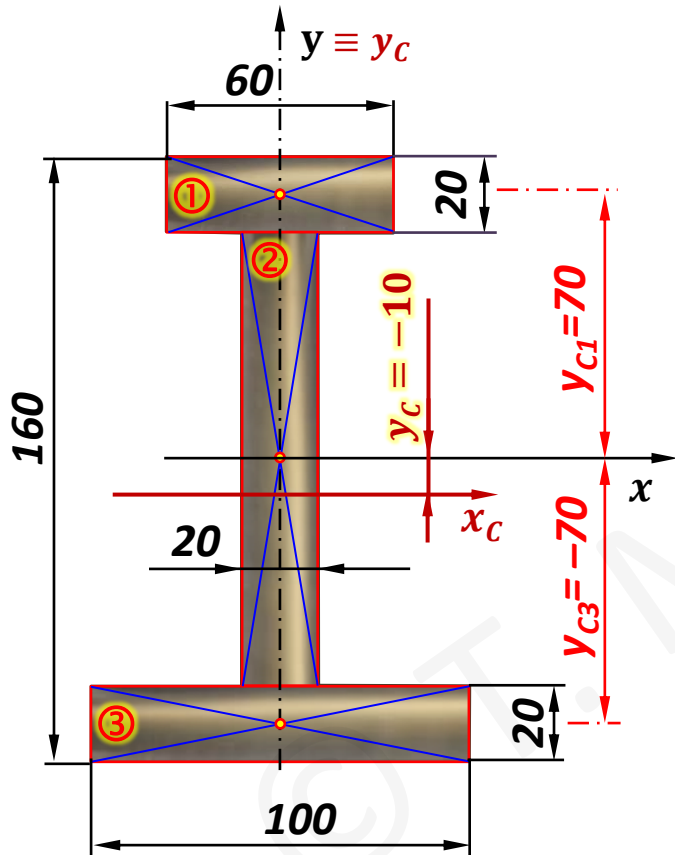
4. Obliczamy współrzędne środka ciężkości całej figury A jako:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_y^{A_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{Ci} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_x^{A_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Ci} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

D1.4. Sposób wyznaczania środka ciężkości figury

Przykład 2: Wyznaczyć położenie środka ciężkości przekroju jak na rysunku.



$$x_c = 0 \quad (\text{zgodnie z twierdzeniem 4})$$

$$y_c = \frac{S_x}{A}$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^{A_i} = \sum_{i=1}^n y_{ci} \cdot A_i$$

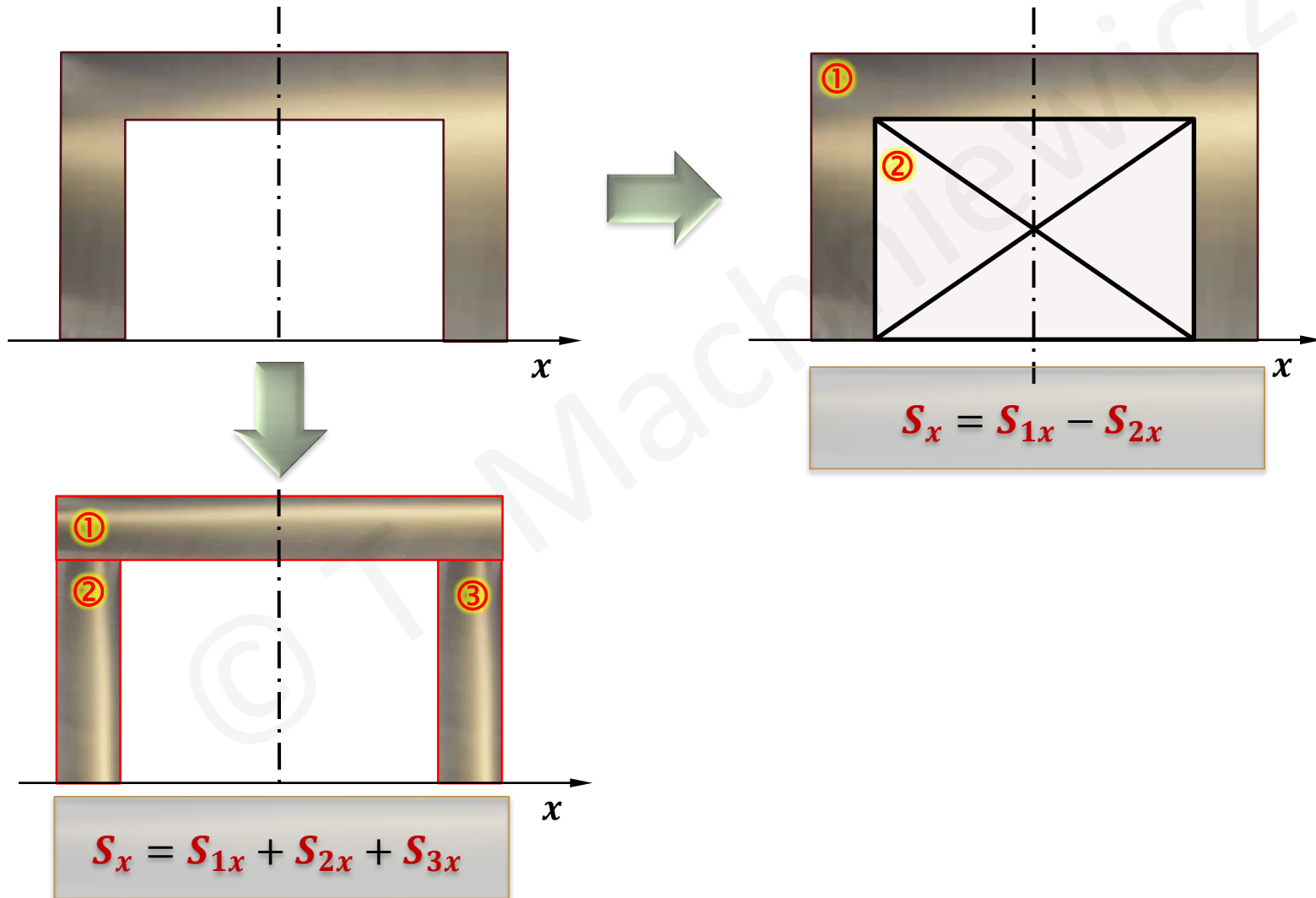
$$S_x = 2 \cdot 6 \cdot 7 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot (-7) = -56 \text{ cm}^3$$

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 10 = 56 \text{ cm}^2$$

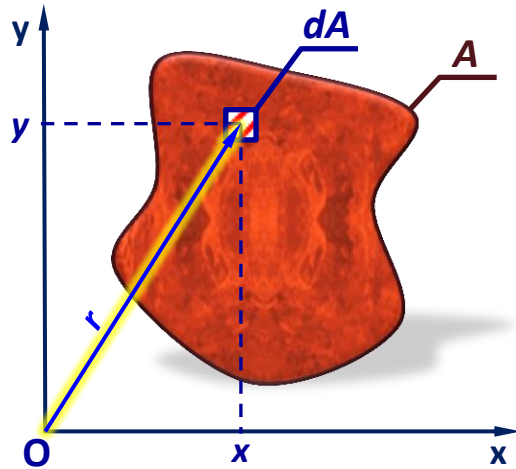
$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{-56}{56} = -1 \text{ cm}$$

D1.4. Sposób wyznaczania środka ciężkości figury

Przykład 3: Jak obliczyć moment statyczny przekroju jak na rysunku?



D1.5. Momenty drugiego stopnia - momenty bezwładności



Dla figury płaskiej o polu powierzchni A , opisanej w kartezjańskim układzie współrzędnych x - y definiuje się następujące **geometryczne momenty drugiego stopnia (momenty bezwładności)**:

❖ Momenty osiowe:

$$J_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_A y^2 \cdot dA$$

$$J_y \stackrel{\text{def}}{=} \int_A x^2 \cdot dA$$

❖ Moment biegunowy:

$$J_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_A r^2 \cdot dA$$

❖ Moment dewiacji:

$$J_{xy}(D_{xy}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A x \cdot y \cdot dA$$

jednostki:

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \text{mm}^4 \\ \text{cm}^4 \\ \text{m}^4 \\ \dots \end{pmatrix}$$

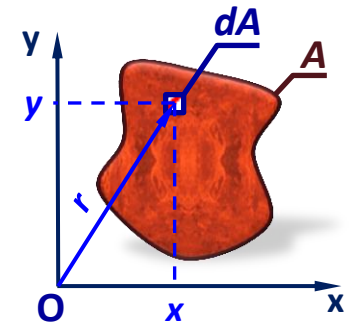
Uwaga: Momenty osiowe i moment biegunowy mogą być tylko dodatnie, moment dewiacji może być dodatni ujemny lub równy zero.

D1.5. Momenty drugiego stopnia - momenty bezwładności

Twierdzenie 6

Moment bezwładności (J_O), obliczany względem bieguna układu współrzędnych x-y, równy jest sumie momentów osiowych J_x oraz J_y .

$$J_O = J_x + J_y$$



Dowód:

$$J_O \stackrel{\text{def}}{=} \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A x^2 \cdot dA = J_x + J_y$$

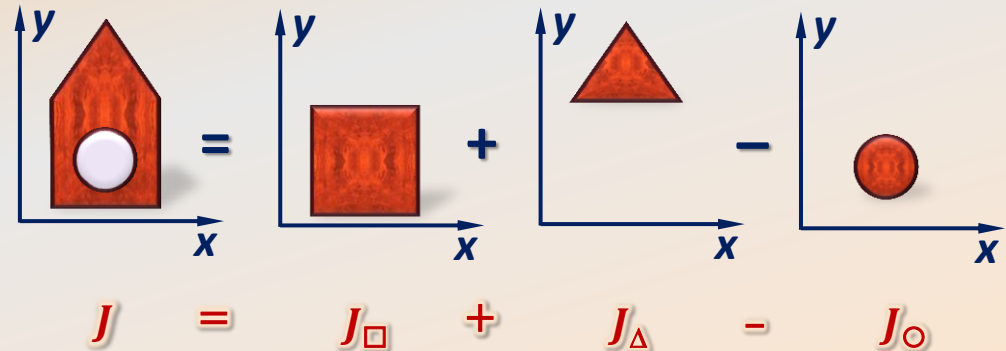
Twierdzenie 7

Momenty bezwładności są addytywne (podobnie jak momenty statyczne), tzn:

Np.

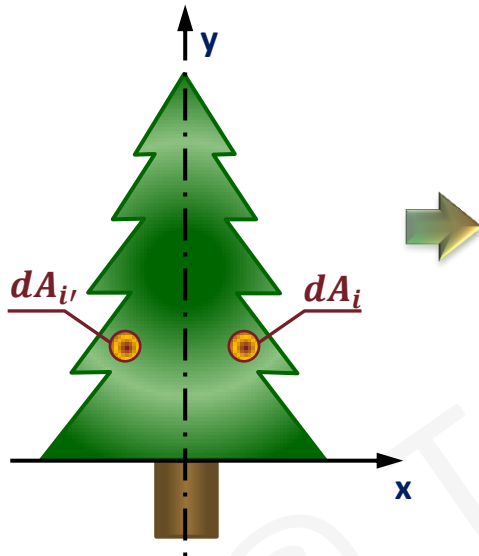
$$J_x^A = \sum_{i=1}^n J_x^{A_i} \quad J_O^A = \sum_{i=1}^n J_O^{A_i}$$

$$J_y^A = \sum_{i=1}^n J_y^{A_i} \quad J_{xy}^A = \sum_{i=1}^n J_{xy}^{A_i}$$



Twierdzenie 8

Jeżeli figura posiada oś symetrii, z którą pokrywa się chociaż jedna z osi układu współrzędnych, to moment dewiacji J_{xy} obliczany względem takiego układu osi jest równy zero.



Dowód:

Dla każdego wycinka pola powierzchni dA_i istnieje taki symetryczny wycinek $dA_{i'}$, że:

$$x \cdot y \cdot dA_i = -x \cdot y \cdot dA_{i'}$$

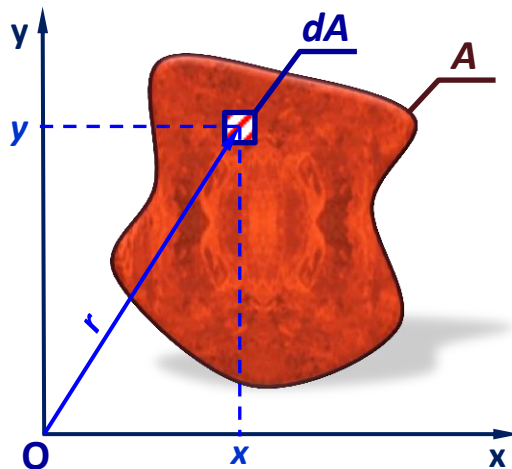
stąd:

$$\int_{A(x>0)} x \cdot y \cdot dA = - \int_{A(x<0)} x \cdot y \cdot dA$$

więc:

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = 0$$

D1.6. Promień bezwładności



Definicja

Promień bezwładności względem osi k (lub bieguna O) jest to taka odległość i_k od prostej k (lub i_o od bieguna O), w której skupione całe pole figury (A) daje moment bezwładności względem tej prostej (lub tego bieguna) równy rzeczywistemu momentowi rozważanej figury.

Twierdzenie 9

Pomiędzy promieniami bezwładności względem osi układu współrzędnych x - y (i_x i i_y), a promieniem bezwładności względem bieguna tego układu (i_o) zachodzi zależność:

$$i_o^2 = i_x^2 + i_y^2$$

Dowód: $J_o = J_x + J_y$

gdzie: $J_o = A \cdot i_o^2$ $J_x = A \cdot i_x^2$ $J_y = A \cdot i_y^2$

$$A \cdot i_o^2 = A(i_x^2 + i_y^2) \Rightarrow i_o^2 = i_x^2 + i_y^2$$

$$i_x \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{J_x}{A}}$$

$$i_y \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

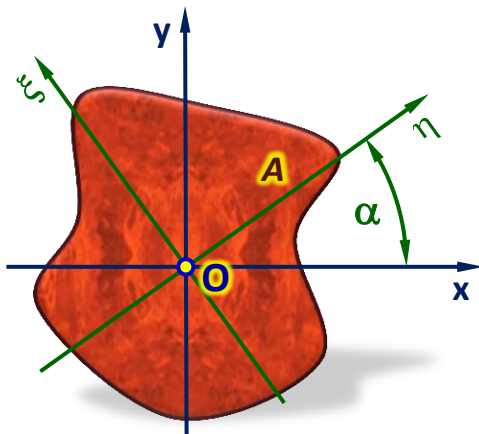
$$i_o \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

$$\Rightarrow J_x = i_x^2 \cdot A$$

$$\Rightarrow J_y = i_y^2 \cdot A$$

$$\Rightarrow J_o = i_o^2 \cdot A$$

D1.7. Główne centralne momenty bezwładności



$$J_x + J_y = J_o = J_\eta + J_\xi$$



Suma momentów bezwładności względem osi układów współrzędnych o wspólnym biegunie jest stała, chociaż wartości poszczególnych momentów osiowych zmieniają się wraz z obrotem układu współrzędnych względem bieguna.



Musi istnieć taki kąt α_0 dla którego momenty osiowe będą przyjmować wartości ekstremalne. Położenie takie wyróżnia zerowa wartość momentu dewiacji liczonego względem danego układu osi (por. p. D1.10).

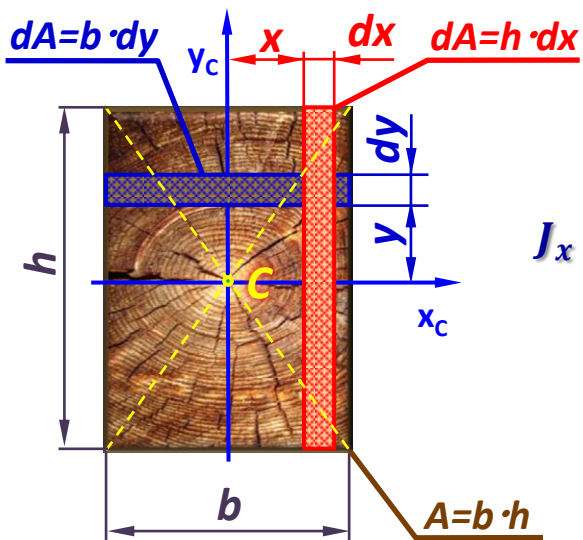
Układ osi względem którego moment dewiacji $J_{xy}=0$ nazywamy **głównymi osiami bezwładności**.

Momenta bezwładności obliczane względem tych osi przyjmują wartości ekstremalne i nazywamy je **głównymi momentami bezwładności**.

Jeżeli którakolwiek z osi układu współrzędnych pokrywa się z osią symetrii rozważanej figury, to osie te są **głównymi osiami bezwładności** (por. twierdzenie 8).

Główne osie bezwładności przechodzące przez środek ciężkości figury nazywamy **głównymi centralnymi osiami bezwładności**, a obliczane względem nich momenty drugiego stopnia to **główne centralne momenty bezwładności**.

D1.7. Główne centralne momenty bezwładności

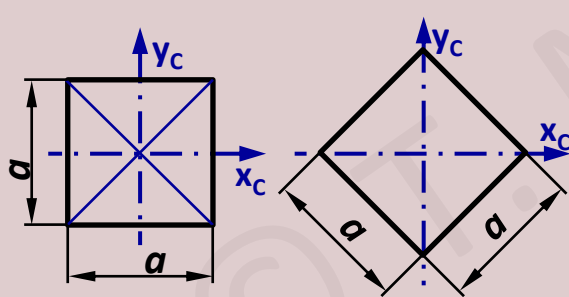


Przykład 4: Obliczyć główne centralne momenty bezwładności prostokąta o szerokości b i wysokości h .

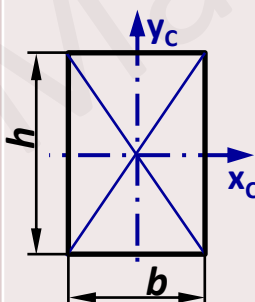
$$J_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \left[\frac{y^3}{3} \cdot b \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_y \stackrel{\text{def}}{=} \int_A x^2 \cdot dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot h \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot h \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Na pamięć !!

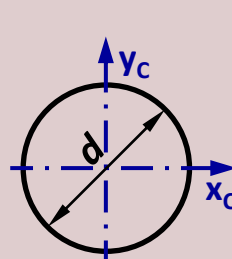


$$J_{xc} = J_{yc} = \frac{a^4}{12}$$

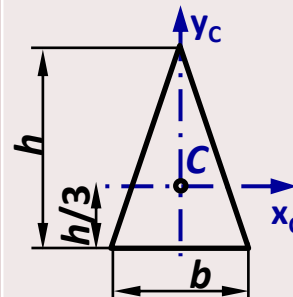


$$J_{xc} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_{yc} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

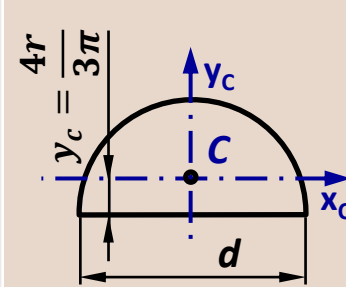


$$J_{xc} = J_{yc} = \frac{\pi d^4}{64}$$



$$J_{xc} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

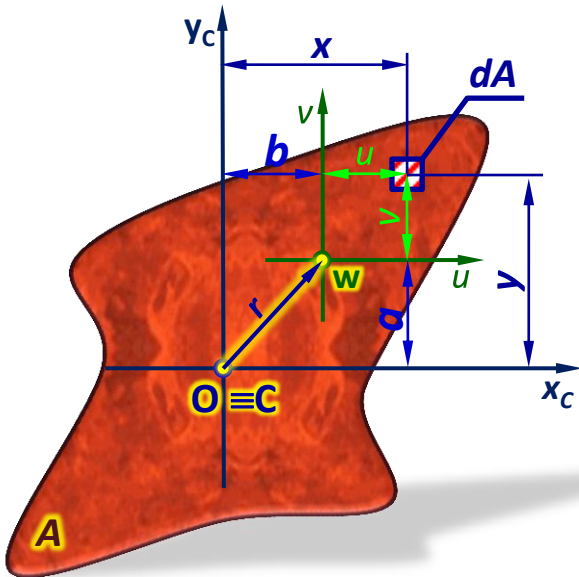
$$J_{yc} = \frac{h \cdot b^3}{48}$$



$$J_{xc} = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$$

$$J_{yc} = \frac{\pi d^4}{128}$$

D1.8. Twierdzenie Steinera



Przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych (x, y) o początku leżącym w środku ciężkości pola A figury.

Dane: $a, b, r, J_x, J_y, J_C, J_{xy}$

Szukane: J_u, J_v, J_W, J_{uv}

$$\begin{aligned}
 J_u &\stackrel{\text{def}}{=} \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (y - a)^2 \cdot dA \\
 &= \underbrace{\int_A y^2 \cdot dA}_{J_{xC}} - 2a \underbrace{\int_A y \cdot dA}_{S_{xC} = 0} + a^2 \underbrace{\int_A dA}_A
 \end{aligned}$$

x_c to oś centralna

Stąd:

$$J_u = J_{xC} + a^2 \cdot A$$

Podobnie:

$$J_v = J_{yC} + b^2 \cdot A$$

$$J_W = J_O + r^2 \cdot A$$

$$J_{uv} = J_{xy} + a \cdot b \cdot A$$

$$J_W = J_u + J_v = \underbrace{J_{xC} + J_{yC}}_{J_O} + A \underbrace{(a^2 + b^2)}_{r^2}$$

Moment bezwładności pola A figury płaskiej względem dowolnej prostej jest równy momentowi bezwładności tej figury względem osi centralnej równoległej do rozważanej prostej, powiększonemu o iloczyn pola tej figury i kwadratu odległości między osiami.

D1.9. Obliczanie głównych centralnych momentów bezwładności

Przykład 4: Obliczyć główne centralne momenty bezwładności dwuteownika jak na rysunku.

Oś y_c jest osią centralną gdyż pokrywa się z osią symetrii figury.

a) Wyznaczanie środka ciężkości figury (współrzędnej y_c)

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{S_{x1} + S_{x2} + S_{x3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 15 + 0 + 18 \cdot 2 \cdot (-15)}{8 \cdot 2 + 28 \cdot 1 + 2 \cdot 15}$$

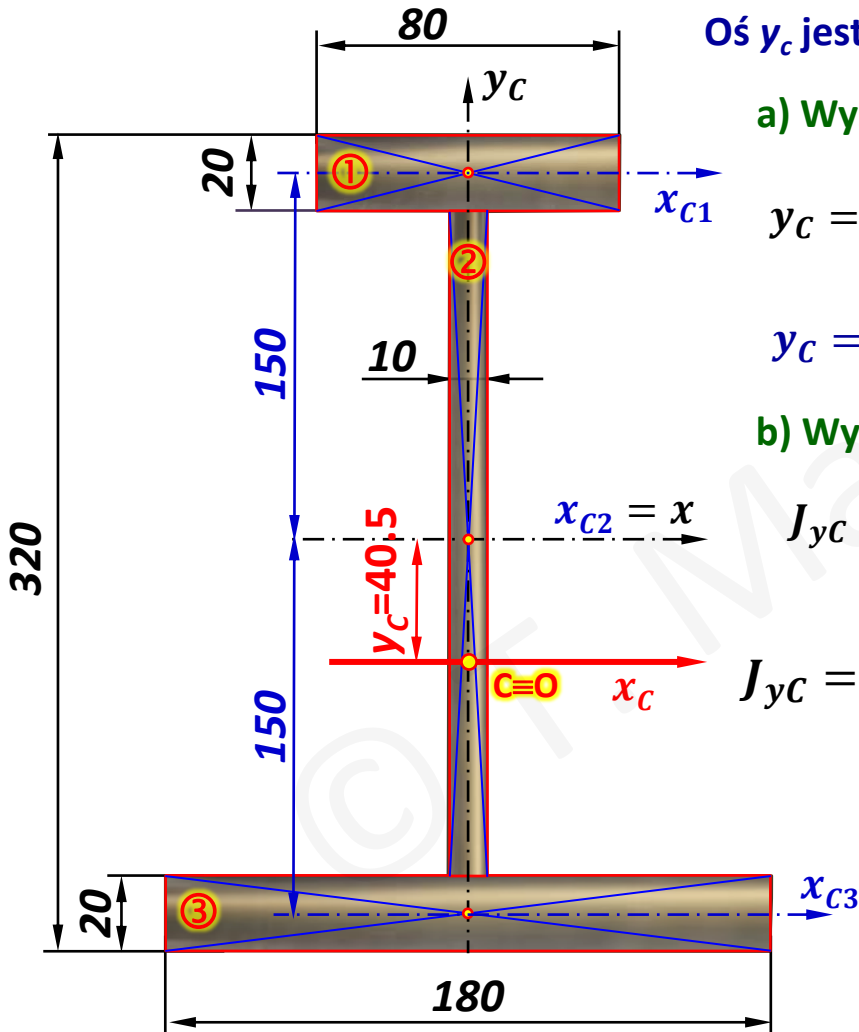
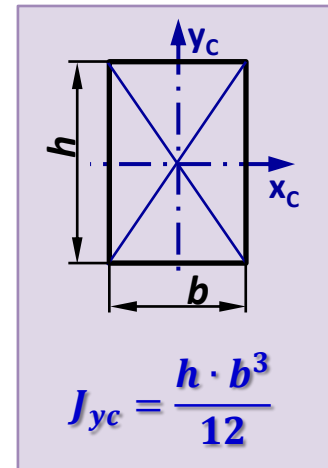
$$y_c = \frac{-300}{74} = -4.05 \text{ cm} \quad \boxed{y_c = -40.5 \text{ mm}}$$

b) Wyznaczanie głównych centralnych momentów bezwładności

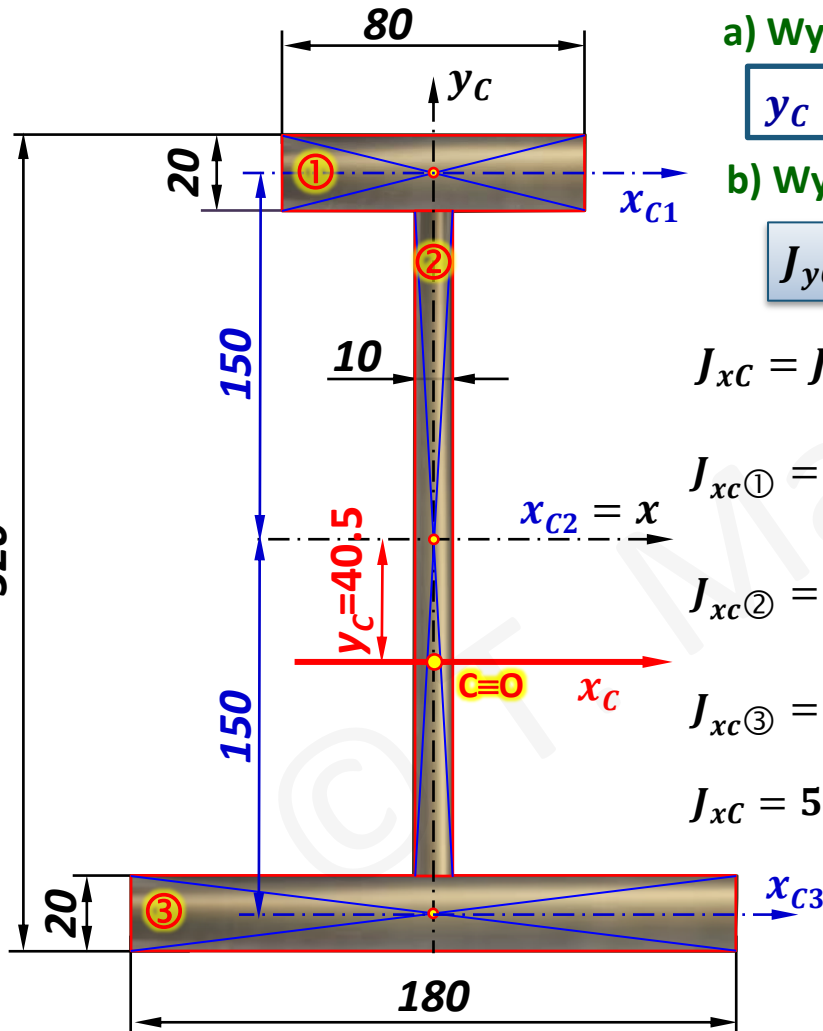
$$J_{y_c} = J_{y_c①} + J_{y_c②} + J_{y_c③}$$

$$J_{y_c} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} + \frac{28 \cdot 1^3}{12} + \frac{2 \cdot 18^3}{12} \quad (\text{cm}^4)$$

$$\boxed{J_{y_c} = 1059.667 \text{ cm}^4}$$



Przykład 4: Obliczyć główne centralne momenty bezwładności dwuteownika jak na rysunku.



a) Wyznaczenie środka ciężkości figury (współrzędnej y_c)

$$y_c = -40.5 \text{ mm}$$

b) Wyznaczenie głównych centralnych momentów bezwładności

$$J_{yC} = 1059.667 \text{ cm}^4$$

$$J_{xC} = J_{x_{c1}} + J_{x_{c2}} + J_{x_{c3}}$$

$$J_{x_{c1}} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} + 8 \cdot 2 \cdot (15 + 4.05)^2 (\text{cm}^4)$$

$$J_{x_{c2}} = \frac{1 \cdot 28^3}{12} + 1 \cdot 28 \cdot (4.05)^2 (\text{cm}^4)$$

$$J_{x_{c3}} = \frac{18 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 18 \cdot (15 - 4.05)^2 (\text{cm}^4)$$

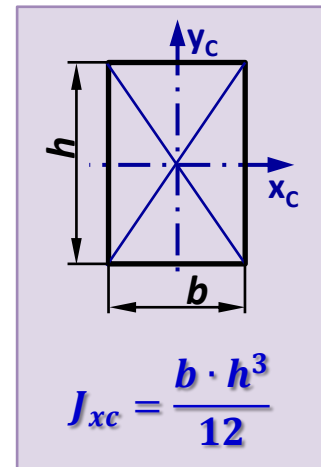
$$J_{xC} = 5811.773 + 2288.603 + 4328.49 (\text{cm}^4)$$

$$J_{xC} = 12\,428.866 \text{ cm}^4$$

$$J_O = J_{xC} + J_{yC}$$

$$J_O = 13\,488.533 \text{ cm}^4$$

Tw. Steinera:
 $J_u = J_{xC} + a^2 \cdot A$

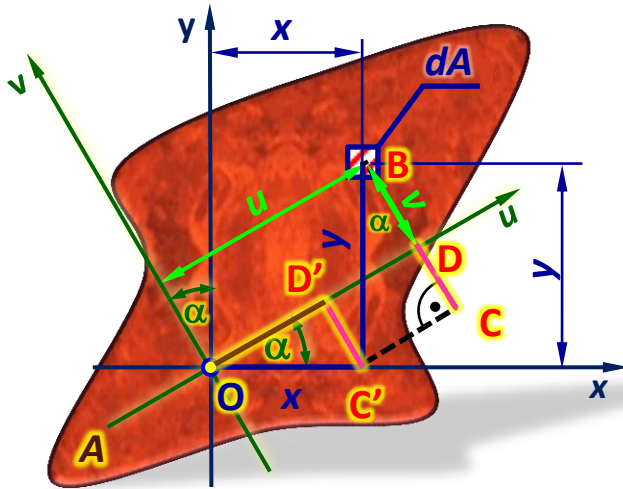


D1.10. Transformacja przez obrót

Mamy figurę opisaną w prostokątnym układzie współrzędnych (x, y) :

Dane: J_x, J_y, J_{xy}

Szukane: J_u, J_v, J_{uv} ,
oraz taki kąt α aby J_u, J_v były ekstremalne



$$v = BC - CD = y \cos \alpha - C'D' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$u = DD' + OD' = C'C + x \cos \alpha = y \sin \alpha + x \cos \alpha$$

$$J_u \stackrel{\text{def}}{=} \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 \cdot dA =$$

$$= \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA + \int_A x^2 \sin^2 \alpha dA - 2 \int_A xy \sin \alpha \cos \alpha dA = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

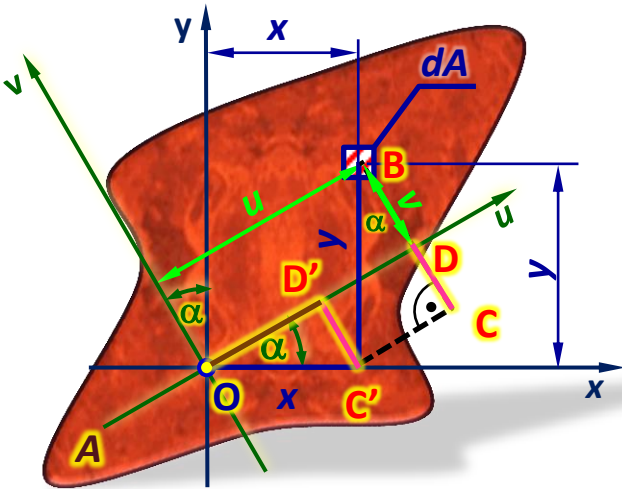
$$J_v \stackrel{\text{def}}{=} \int_A u^2 \cdot dA = \int_A (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \sin^2 \alpha dA + \int_A x^2 \cos^2 \alpha dA + 2 \int_A xy \sin \alpha \cos \alpha dA$$

$$= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$J_{uv} \stackrel{\text{def}}{=} \int_A uv \cdot dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(y \sin \alpha + x \cos \alpha) \cdot dA =$$

$$= J_x \sin \alpha \cos \alpha + J_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - J_y \sin \alpha \cos \alpha$$

D1.10. Transformacja przez obrót



Mamy figurę opisaną w prostokątnym układzie współrzędnych (x, y) :

Dane: J_x, J_y, J_{xy}

Szukane: J_u, J_v, J_{uv} ,
oraz taki kąt α aby J_u, J_v były ekstremalne

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$J_{uv} = J_x \sin \alpha \cos \alpha - J_y \sin \alpha \cos \alpha + J_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Uwzględniając: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$ $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$

Otrzymujemy:

$$J_u = J_x \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) + J_y \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_v = J_x \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) + J_y \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) + J_{xy} \sin 2\alpha$$

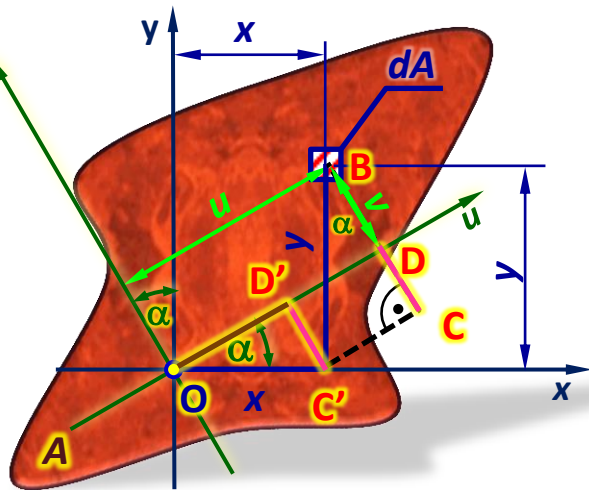
$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

D1.10. Transformacja przez obrót



Mamy figurę opisaną w prostokątnym układzie współrzędnych (x, y) :

Dane: J_x, J_y, J_{xy}

Szukane: J_u, J_v, J_{uv} ,
oraz taki kąt α aby J_u, J_v były ekstremalne

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_v = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

Dla dowolnego α : $J_u + J_v = J_x + J_y$

Momenty osiowe J_u oraz J_v osiągają wartości ekstremalne dla takiego kąta α_0 , że: $\frac{dJ_u}{d\alpha}(\alpha_0) = 0$

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -(J_x - J_y) \sin 2\alpha - 2J_{xy} \cos 2\alpha = -2 \left(\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \right) = -2J_{uv} = 0$$

$$J_{uv} = 0 \Rightarrow J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

Wówczas: